

[Essential Skills] Mathematics

*Studiewijzer*

Module [2]

*Verzamelingenleer*

Tijd: 420 minuten

## ▼ 2.0 Leerdoelen en onderwerpen

### ▼ 2.0.1 Leerdoelen

Na deze module bestudeerd te hebben moet je:

- het verschil kennen tussen impliciet en expliciet en daarmee kunnen rekenen
- weten wat de kardinaliteit van een verzameling is
- weten wat een deelverzameling is en wat een *echte* deelverzameling is
- basisoperaties kunnen uitvoeren op verzamelingen
- de machtsverzameling van een verzameling kunnen bepalen
- het cartesisch product kunnen bepalen van twee verzamelingen
- binaire relaties tussen twee verzamelingen expliciet kunnen noteren

### ▼ 2.0.2 Onderwerpen

2.1 <i>Beschrijving van verzamelingen</i> .....	2
2.2 <i>Deelverzamelingen</i> .....	5
2.3 <i>Basisoperaties op verzamelingen</i> .....	7
2.4 <i>Machtsverzamelingen</i> .....	11
2.5 <i>Het cartesisch product</i> .....	13
2.6 <i>Binaire relaties tussen verzamelingen</i> .....	15
2.7 <i>Antwoorden van de opgaven</i> .....	17

## 2.1 Beschrijving van verzamelingen

De verzamelingenleer vormt sinds het begin van de twintigste eeuw een van de grondslagen van de wiskunde. De verzamelingenleer betreft de bestudering en formalisering van het begrip verzameling, en ondersteunt daarmee de axiomatische onderbouwing van andere deelgebieden van de wiskunde.

Een verzameling is in de verzamelingenleer (een deelgebied van de wiskunde) een collectie van verschillende objecten, elementen genoemd, die op haar beurt ook weer als een object wordt beschouwd. Het begrip verzameling is een basisbegrip dat zich niet gemakkelijk laat definiëren in termen van andere begrippen, maar moet echt axiomatisch gedefinieerd worden.

Twee verzamelingen zijn identiek, wanneer ze dezelfde elementen bevatten. Een verzameling zonder element noemt men een lege verzameling. Bij de beschrijving van een verzameling gaat het uitsluitend om de vraag welke elementen in de verzameling zijn opgenomen. Dat hetzelfde element eventueel meerdere keren in de verzameling voorkomt is niet van belang (het element hoeft dan maar één keer genoteerd te worden), evenmin als de volgorde van de elementen.

In het dagelijkse spraakgebruik maken we ook gebruik van het begrip verzameling: we spreken van bestek als we (de verzameling van) lepels, vorken en messen bedoelen. Het servies van oma is een verzameling borden, schalen enz. Een pak speelkaarten is een ander woord voor een verzameling speelkaarten. In de wiskunde kennen we de verzameling van de natuurlijke getallen:  $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ , een totaliteit met als elementen de getallen  $0, 1, 2, 3, 4, \dots$  enz.

Er zijn een aantal bekende verzamelingen in de wiskunde; nl:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$ , waarbij wij ons concentreren op de eerste twee:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , alle positieve gehele getallen, plus het getal 0.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , alle positieve en negatieve gehele getallen.

Wanneer  $x$  een element is uit een verzameling  $A$ , schrijven we dat als volgt:  $x \in A$ . Als  $x$  geen element is uit een verzameling  $A$ , schrijven we dat als volgt:  $x \notin A$ .

Er zijn twee manieren om de elementen van een verzameling te beschrijven of te specificeren. Een manier is door een intensionele definitie (impliciet), waarbij gebruik wordt gemaakt van een regel of een semantische beschrijving van de elementen.

Bekijk de volgende voorbeelden:

- A is de verzameling, waarvan de elementen de kleuren van de Nederlandse vlag zijn.
- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 6\}$ , dit kun je lezen als volgt:  $x$  is een element uit de verzameling  $\mathbb{N}$ , waarvoor geldt dat  $x$  groter of gelijk is aan 2 en kleiner of gelijk aan 6.

De tweede manier is door extensie - dat is wanneer elk element van de verzameling expliciet wordt opgesomd. Een extensionele definitie wordt aangeduid, doordat de opsomming van de elementen tussen accolades wordt geplaatst:

- $A = \{\text{rood, wit, blauw}\}$
- $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

### ▼ Opgave 2.1.1

Geef een opsomming (expliciet) van de elementen uit de volgende impliciet gedefinieerde verzamelingen:

a)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3 \wedge x < 8\}$

b)  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

c)  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 4 \vee x > 2\}$

(n.b.:  $\wedge$  is de logische 'en',  $\vee$  is de logische 'of')

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.1.1\] Opsommen van elementen](#)

Elk element van een verzameling moet uniek zijn; geen twee elementen mogen identiek zijn.

Alle verzamelingoperaties bewaren de eigenschap dat elk element van de verzameling uniek is. De volgorde, waarin de elementen van een verzameling worden opgesomd, is niet relevant.

**Voorbeeld.**  $\{6, 11\} = \{11, 6\} = \{11, 6, 11, 11\}$

De lege verzameling, die immers geen elementen heeft, kan als volgt worden genoteerd:  $\{ \}$ . Vaak wordt hiervoor het symbool  $\emptyset$  gebruikt.

Het aantal elementen in een verzameling noemt men de kardinaliteit van de verzameling.

**Voorbeeld.**  $A = \{1, 2, 3\}$ , dan is de kardinaliteit van de verzameling als volgt op te schrijven:  $|A| = 3$ .

### ▼ *Opgave 2.1.2*

Geef de kardinaliteit van de volgende verzamelingen:

a)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

b)  $B = \{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$

c)  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 2\}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.1.2\] Kardinaliteit van verzamelingen](#)

## ▼ 2.2 Deelverzamelingen

Als A en B verzamelingen zijn en elk element van A is ook een element van B, dan zeggen of schrijven we : A is een deelverzameling van B;

$$A \subseteq B$$

of B omvat A; (in het Engels noemt men B een superset van A)

$$B \supseteq A$$

Een deelverzameling van A die niet gelijk is aan B wordt een *echte, eigenlijke* of *strikte deelverzameling* genoemd. Als A een echte deelverzameling is van B, dan schrijven we

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

echt of strikt omvattende verzamelingen worden analoog genoteerd als,

$$B \supset A \Leftrightarrow (B \supseteq A) \wedge (B \neq A)$$

Iedere verzameling B is een deelverzameling van zichzelf:  $B \subseteq B$ . De verzameling van alle deelverzamelingen van een verzameling wordt ook wel de *machtsverzameling* genoemd, dit komt in het volgende hoofdstuk aan de orde.

**Voorbeelden.**  $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$  - De verzameling  $\{1, 2\}$  is een echte deelverzameling van  $\{1, 2, 3\}$ . De verzameling van natuurlijke getallen is een echte deelverzameling van de verzameling van de rationale getallen.

De verzameling  $\{x : x \text{ is een priemgetal groter dan } 2000\}$  is een echte deelverzameling van  $\{x : x \text{ is een oneven getal groter dan } 1000\}$ . Elke verzameling is een deelverzameling van zichzelf, maar geen echte deelverzameling. De lege verzameling, geschreven als  $\{\}$ , is een deelverzameling van elke verzameling A. De lege verzameling is altijd een echte deelverzameling, behalve van zichzelf.

### ▼ *Opgave 2.2.1*

Geef bij elke opgave aan of de bewering waar of onwaar is:

a)  $\{8, 9\} \subseteq \{6, 7, 8, 9\}$

b)  $\{6, 7, 8, 9\} \subset \{6, 7, 8, 9\}$

c)  $\{ \} \subset \{6, 7, 8, 9\}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.3.1\] Deelverzamelingen](#)

## 2.3 Basisoperaties op verzamelingen

### Doorsnede

*Doorsnede*, of *intersectie*, is een begrip uit de verzamelingenleer. De doorsnede van een aantal verzamelingen is de verzameling die bestaat uit de gemeenschappelijke elementen van de samenstellende verzamelingen. De doorsnede van de verzamelingen A en B wordt genoteerd als  $A \cap B$ .

Als twee verzamelingen een lege doorsnede hebben, noemt men ze *disjunct*. Als ze een niet-lege doorsnede hebben, wordt soms gezegd dat ze elkaar snijden.

**Definitie.** De doorsnede  $A \cap B$  van de verzamelingen A en B is de verzameling die bestaat uit de elementen die zowel tot A als tot B behoren:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

**Voorbeelden.** De doorsnede van de verzamelingen  $\{1, 2, 3\}$  en  $\{2, 3, 4\}$  is de verzameling  $\{2, 3\}$ . Het getal 9 is *geen* element van de doorsnede van de verzameling priemgetallen  $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  en de verzameling oneven getallen  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$ .

**Eigenschappen.** Doorsnede is een associatieve en commutatieve operatie, dus:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

en

$$A \cap B = B \cap A$$

### Opgave 2.3.1

Bepaal de doorsnede van de volgende verzamelingen:

a)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  en  $B = \{2, 4, 8, 16\}$

b)  $A = \{5, 6, 7, 8\}$  en  $B = \{9, 10, 11, 12\}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.3.1\] Doorsnede van verzamelingen](#)



## Vereniging

*Vereniging*, of *unie*, is ook een begrip uit de verzamelingenleer. De vereniging van een aantal verzamelingen is de verzameling die bestaat uit alle elementen van de samenstellende verzamelingen. De vereniging van de verzamelingen A en B wordt genoteerd als  $A \cup B$ .

**Definitie.** De vereniging  $A \cup B$  van de verzamelingen A en B is de verzameling die bestaat uit alle elementen van A en van B:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

**Voorbeeld.** Zij  $A = \{1, 2, 6, 10, 12\}$  en  $B = \{1, 2, 5, 8\}$ , dan is  $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 8, 10, 12\}$ .

**Eigenschappen.** Vereniging is een associatieve en commutatieve operatie, dus:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

en

$$A \cup B = B \cup A$$

### ▼ Opgave 2.3.2

Bepaal de vereniging van de volgende verzamelingen:

- a)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  en  $B = \{2, 4, 8, 16\}$
- b)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  en  $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- c)  $A = \{2, 4\}$  en  $B = \{4, 5\}$  en  $C = \{5, 6\}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.3.2\] Vereniging van verzamelingen](#)

## Complement

In de verzamelingenleer is het *complement* van een verzameling A gedefinieerd met betrekking tot een verzameling U (Universum). Het complement van A is de deelverzameling van U bestaande uit alle elementen van U die niet tot A behoren.

Is U niet de universele verzameling, dan is er sprake van een relatief complement en is er geen speciale notatie. Het relatieve complement van A ten opzichte van B kan uitgedrukt worden als verschil

$$B \setminus A \text{ of } B - A$$

**Voorbeeld.** Zij  $A = \{3, 4, 6\}$  en  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , dan is  $B \setminus A = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$ .

**Eigenschappen.** Het complement van het complement is de verzameling zelf:  $(A^c)^c = A$ .

Samen met het complement vormt een verzameling het hele universum:  $A^c \cup A = U$ .

Er is geen gemeenschappelijk element met het complement:  $A^c \cap A = \{\}$ . Buiten het universum is niets:  $U^c = \{\}, \{\}^c = U$ .

Regels van De Morgan:  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  en  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

### ▼ Opgave 2.3.3

Bepaal het complement  $A^c$  van de volgende verzamelingen als is gegeven

$$U = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \wedge x < 12\}:$$

a)  $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$

b)  $A = \mathbb{Z}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.3.3\] Complement van verzamelingen](#)

## Verschil

In de wiskunde is de *verschilverzameling* of *relatieve complement* van twee verzamelingen  $A$  en  $B$  de verzameling die bestaat uit de elementen van  $A$  die geen element van  $B$  zijn. De verschilverzameling van  $A$  en  $B$  wordt geschreven als:  $A \setminus B$  of ook als  $A - B$ .

**Definitie.**  $x$  is een element van  $A \setminus B$  dan en slechts dan als  $x$  een element is van  $A$  en  $x$  niet een element is van  $B$ :

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

Met behulp van de begrippen doorsnede en complement kan het verschil ook gedefinieerd worden:  $A \setminus B = A \cap B^c$ .

**Voorbeeld.** Zo is de verschilverzameling van de verzamelingen  $A = \{1, 2, 3\}$  en  $B = \{2, 3, 4\}$  de verzameling  $A \setminus B = \{1\}$ .

Merk op dat dit een asymmetrische (niet-commutatieve) operatie is (tenzij  $A = B$ ):

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

### ▼ Opgave 2.3.4

Bepaal  $A \setminus B$  van :

a)  $A = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$  en  $B = \{10, 11, 12\}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.3.4\] Verschil van verzamelingen](#)

### Symmetrisch verschil

Alle elementen die alleen in de ene of alleen in de andere verzameling voorkomen verschijnen in de vereniging van de twee verschilverzamelingen, die het *symmetrische verschil* wordt genoemd. Dit wordt genoteerd als:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

### ▼ Opgave 2.3.5

Bepaal  $A \Delta B$  van :

a)  $A = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$  en  $B = \{10, 11, 12, 17, 19\}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.3.5\] Symmetrisch verschil van verzamelingen](#)

## 2.4 Machtsverzamelingen

De machtsverzameling van een verzameling  $S$ , die wordt weergegeven als  $\mathcal{P}(S)$  is de verzameling van alle deelverzamelingen van  $S$ .

De  $\mathcal{P}$  komt hierin van 'power', het Engelse woord voor 'macht'.

Voorbeeld: zij  $S$  een verzameling  $\{A, B, C\}$ , dan is  $\{A, C\}$  een deelverzameling van  $S$ , evenals  $\{A, B\}$  etc. De complete lijst van deelverzamelingen van  $S$  is:

$\{ \}$  (ook weergegeven als  $\emptyset$ , de lege verzameling)

$\{A\}$

$\{B\}$

$\{C\}$

$\{A, B\}$

$\{A, C\}$

$\{B, C\}$

$\{A, B, C\}$

De machtsverzameling is nu de verzameling van deze verzamelingen, oftewel:

$$\mathcal{P}(S) = \{ \{ \}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\} \}$$

Zij  $|S| = n$ , dus  $n$  is het aantal elementen in  $S$ , dan geldt voor de machtsverzameling:

$|\mathcal{P}(S)| = 2^n$ . Dit is als volgt in te zien: bij elk element kun je kiezen of je dit element wel of niet opneemt in de deelverzameling; dat geeft  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots \cdot 2$  mogelijkheden in totaal.

Zodoende kun je (en computers doen dit) elke deelverzameling als  $n$ -bitjes weergeven, de 0 geeft aan dat een element niet in de deelverzameling zit en een 1 dat deze er wel inzit. In bovengenoemd voorbeeld correspondeert 000 (3 elementen, dus 3 bits) met de lege verzameling, en 101 met  $\{A, C\}$  en 111 met  $\{A, B, C\}$ . Er zijn zo uiteraard ook  $2^n$  zulke getallen te maken.

Het is wiskundig ook mogelijk om de machtsverzameling van een oneindige verzameling te beschouwen. Het diagonaalbewijs van Cantor toont aan dat de kardinaliteit van de machtsverzameling van een oneindige verzameling altijd strikt groter is dan die van de verzameling zelf (de machtsverzameling is 'oneindiger' dan de oorspronkelijke verzameling). Tussen enerzijds de machtsverzameling van de natuurlijke getallen en anderzijds de reële getallen is een bijectie te vinden (dit kan met behulp van oneindige rijen van nullen en enen).

De machtsverzameling van een verzameling  $S$ , met daarop de bewerkingen vereniging, doorsnede en complement, vormt het standaardvoorbeeld van een booleaanse algebra. Het is zelfs mogelijk om aan te tonen dat elke eindige booleaanse algebra isomorf is met een booleaanse algebra van een machtsverzameling voor een bepaalde verzameling  $S$ . Voor oneindige booleaanse algebra's geldt dit niet, maar wel geldt dat elke oneindige booleaanse algebra een deelalgebra van een machtsverzameling van een booleaanse algebra is.

### ▼ *Opgave 2.4.1*

Bepaal van de volgende verzamelingen de machtsverzameling:

- a)  $A = \{1, 2, 3\}$
- b)  $B = \{\{ \}, 1\}$
- c)  $C = \{a, \{b\}, c\}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.4.1\] Machtsverzamelingen](#)

## ▼ 2.5 Het Cartesisch product

In de verzamelingenleer is het Cartesisch product of de productverzameling van twee verzamelingen de verzameling van alle koppels of geordende paren  $[a, b]$  waar  $a$  uit de eerste en  $b$  uit de tweede verzameling komt. Het Cartesisch product van twee verzamelingen  $A$  en  $B$  wordt genoteerd als  $A \times B$ .

$$A \times B = \{ [a, b] \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

Het Cartesisch product is genoemd naar de Franse filosoof en wiskundige René Descartes. Hij ontdekte dat een punt in een vlak kon worden gezien als een getallenpaar. In moderne notatie maakte hij het vlak equivalent met  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , ofwel  $\mathbb{R}^2$ .

Voorbeeld: voor  $A = \{1, 2\}$  en  $B = \{a, b, c\}$ , is:

$$A \times B = \{ [1, a], [1, b], [1, c], [2, a], [2, b], [2, c] \}.$$

Enkele eigenschappen van het Cartesisch product:

- Het Cartesisch product van een willekeurige verzameling met de lege verzameling is altijd de lege verzameling.
- Als  $A$  en  $B$  eindige verzamelingen zijn, is het aantal elementen van  $A \times B$  gelijk aan het product van het aantal elementen van  $A$  en het aantal elementen van  $B$  :  
 $|A \times B| = |A| \times |B|$ .
- Als  $A$  of  $B$  oneindig is, en de andere verzameling is niet leeg, dan is  $A \times B$  oneindig.
- Er geldt in het algemeen niet dat  $A \times B = B \times A$ . Tussen beide producten bestaat wel een canonische bijectie, nl. de omkering van elk paar .

Merk op dat bij databases met het commando "join" van twee tabellen het Cartesisch product wordt gemaakt.

### ▼ *Opgave 2.5.1*

Bepaal van de volgende verzamelingen het cartesisch product  $A \times B$  :

a)  $A = \{1, 2, 3\}$  en  $B = \{1, 2\}$

b)  $A = \{1, 2\}$  en  $B = \{1, 2, 3\}$

c)  $A = \{a, b\}$  en  $B = \{ \}$

Bepaal van de volgende verzamelingen het cartesisch product  $A^2$  :

d)  $A = \{1, 2, 3\}$

e)  $A = \{a, \{ \} \}$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.5.1\] Cartesisch product](#)

## ▼ 2.6 Binaire relaties tussen verzamelingen

In de wiskunde koppelt een tweepolaatsige relatie of *binaire relatie* elementen uit een verzameling aan elementen uit een andere (of dezelfde) verzameling. Een tweepolaatsige relatie is een specifiek geval van een relatie, namelijk een relatie met een plaatsigheid of ariteit van 2. Anders geformuleerd is een tweepolaatsige relatie de wiskundige beschrijving van het al dan niet bestaan van een zeker verband tussen twee objecten.

Een intuïtief alledaags voorbeeld van een tweepolaatsige relatie is het begrip *bezitten*. De tweepolaatsige relatie *bezitten* koppelt mensen aan objecten, oftewel elementen uit de verzameling van alle mensen aan elementen uit de verzameling van alle objecten. De koning wordt door deze relatie aan de kroon gekoppeld en als Dirk en Anna samen een huis gekocht hebben, dan worden zij beiden aan dat huis gekoppeld. Niemand is aan de zon of de maan gekoppeld en mensen die niets bezitten worden door de relatie *bezitten* nergens aan gekoppeld.

**Voorbeeld.** Van een tweepolaatsige relatie die elementen uit een verzameling koppelt aan elementen uit dezelfde verzameling is de relatie *houden van*, die mensen aan mensen koppelt. Deze relatie koppelt personen die van elkaar houden aan elkaar. Iets preciezer geformuleerd koppelt *houden van* persoon X aan persoon Y indien (en enkel indien) persoon X van persoon Y houdt. Aldus wordt Werther bijvoorbeeld aan Charlotte gekoppeld, maar Charlotte niet aan Werther. Werther houdt, met andere woorden, van Charlotte, maar Charlotte houdt niet van Werther. De koppeling is in zekere zin dus gericht. Er zijn ook paren die wel in beide richtingen aan elkaar gekoppeld zijn, zoals Romeo en Julia. Casanova is een voorbeeld van iemand die aan vele personen gekoppeld is (en aan wie vele personen gekoppeld zijn) en het is voorstelbaar dat er mensen zijn die aan niemand gekoppeld zijn. Narcissus, ten slotte, is iemand die aan zichzelf gekoppeld is.

In de wiskunde zijn tweepolaatsige relaties alomtegenwoordig. Ze worden gebruikt om *is groter dan* en *is deelbaar door* in de rekenkunde, *is congruent aan* in de meetkunde en vele andere begrippen mee te definiëren. Daarnaast wordt de *functie*, een van de belangrijkste begrippen in de wiskunde, meestal gedefinieerd als een speciaal geval van een tweepolaatsige relatie. Ook andere exacte wetenschappen passen tweepolaatsige relaties veelvuldig toe in uiteenlopende gebieden. In de informatica worden ze onder andere gebruikt in het relationele model voor databases, maar ook in de economie, biologie, natuurkunde en andere wetenschappen worden diverse fenomenen met tweepolaatsige relaties gemodelleerd.



**Definitie.** De binaire relatie  $R$  op de verzamelingen  $A \times B$  is een deelverzameling van het Cartesisch product  $A \times B$  en wordt gedefinieerd als:

$$R \subseteq A \times B$$

Als  $A = B$ , spreken we niet van een relatie van  $A$  naar  $A$ , maar van een relatie op  $A$ . Indien een paar  $[a, b]$  element is van de relatie (er wordt ook wel gezegd ' $a$  en  $b$  staan in relatie met elkaar') kan dat bij binaire relaties ook als volgt worden weergegeven:  $aRb$ .

**Voorbeeld.** Beschouw de verzameling  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  en de binaire relatie  $aRb \leftrightarrow (a < b)$ , waarbij  $a, b \in A$ .

Het cartesisch product  $A^2$  is de volgende verzameling:  $\{[a, b] \mid a \in A \wedge b \in A\}$ .

Deze verzameling bevat  $5 \cdot 5 = 25$  elementen:  $[1, 1], [1, 2], [1, 3], \dots, [5, 4], [5, 5]$ .

In de relatie  $a < b$  komen een groot aantal elementen niet voor, zoals  $[1, 1]$  of  $[3, 1]$ .

Dus de elementen uit  $A^2$  die voldoen aan de relatie  $a < b$  vormen een deelverzameling van  $A^2$ .

De volgende paren komen voor in de relatie:

$$R = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [3, 4], [3, 5], [4, 5]\}.$$

### ▼ Opgave 2.6.1

Bepaal  $R$  expliciet als gegeven is dat  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  en  $R \subseteq A^2$ .

a)  $aRb \leftrightarrow (a \geq b)$

b)  $aRb \leftrightarrow (a - b = 2)$

c)  $aRb \leftrightarrow (a \cdot b > 11)$

[Maak op Maple T.A. de oefening: \[2.6.1\] Binaire relaties tussen verzamelingen](#)

## ▼ 2.7 Antwoorden van de opgaven

### ▼ *Opgave 2.1.1*

- a)  $A = \{4, 5, 6, 7\}$
- b)  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- c)  $C = \{3, 4, 5, \dots\}$

### ▼ *Opgave 2.1.2*

- a)  $n = 4$
- b)  $n = 4$
- c)  $n = \infty$

### ▼ *Opgave 2.2.1*

- a) *waar*
- b) *onwaar*
- c) *waar*

### ▼ *Opgave 2.3.1*

- a)  $A \cap B = \{2, 4\}$
- b)  $A = \{ \}$

▼ **Opgave 2.3.2**

a)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8, 16\}$

b)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

c)  $A \cup B \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$

▼ **Opgave 2.3.3**

a)  $A^c = \{5, 6, 8, 10, 11\}$

b)  $A^c = \{ \}$

▼ **Opgave 2.3.4**

a)  $A \setminus B = \{8, 9, 13\}$

▼ **Opgave 2.3.5**

a)  $A \Delta B = \{8, 9, 13, 17, 19\}$

▼ **Opgave 2.4.1**

a)  $\mathcal{P}(A) = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{ \} \}$

b)  $\mathcal{P}(B) = \{ \{ \}, \{1\}, \{ \{ \} \}, \{ \{ \}, 1 \} \}$

c)  $\mathcal{P}(C) = \{ \{a\}, \{ \{b\} \}, \{c\}, \{a, \{b\}\}, \{a, c\}, \{ \{b\}, c \}, \{a, \{b\}, c\}, \{ \} \}$

▼ **Opgave 2.5.1**

a)  $A \times B = \{ [1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [3, 1], [3, 2] \}$

b)  $A \times B = \{ [1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [2, 3] \}$

c)  $A \times B = \{ \}$

$$d) A^2 = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3]\}$$

$$e) A^2 = \{[a, a], [a, \{\}], [\{\}, a], [\{\}, \{\}]\}$$

### ▼ *Opgave 2.6.1*

a)

$$aRb = \{[1, 1], [2, 1], [2, 2], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [4, 1], [4, 2], [4, 3], [4, 4], [5, 1], [5, 2], [5, 3], [5, 4], [5, 5]\}$$

$$b) aRb = \{[3, 1], [4, 2], [5, 3]\}$$

$$c) aRb = \{[3, 4], [3, 5], [4, 3], [4, 4], [4, 5], [5, 3], [5, 4], [5, 5]\}$$